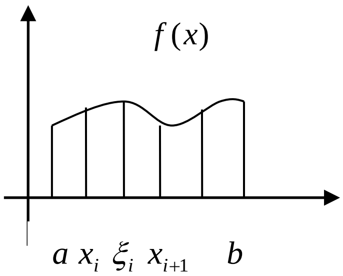
Анықталған интеграл.

$[a,b]$ кесіндісін $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ тең n бөлікке бөліп, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ нүктесін алып, $\sigma(\xi, x)$ интегралдық қосындысын құрастырамыз:



$$\sigma(\xi, x) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

$y = f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы деп осы функцияның $[a,b]$ кесіндісін бөліктеудегі интегралдық қосындыларының Δx_i-дің максимал мәні нөлге ұмтылғандағы шегін айтамыз, яғни, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sigma(\xi, x)$.

$$\int_a f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (2).$$

Анықталған интегралдың қасиеттері:

1. Егер $a = b$ болса, онда $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Егер $a < b$ болса, онда $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3. $a < c < b$ үшін $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4. $\forall x \in [a,b]$ үшін $f(x) \geq 0$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. $\forall x \in [a,b]$ үшін $f(x) \leq g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

6. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |\, f(x)\,|\, dx$ - *анықталған интегралдың модулін бағалау.*

7. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ - $y = f(x)$-жұп функция.

8. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ - $y = f(x)$ тақ функция.

Орта мән туралы теорема: $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда бұл кесіндіден $\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$ теңдігі орындалатындай с нүктесі табылады. Бұл $f(c)$ мәні функцияның $[a,b]$ аралығындағы орта мәні деп аталады.

Ньютон – Лейбниц формуласы.

Анықталған интегралды интегралдау әдістері

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болсын және $y = F(x)$ функциясы осы аралықтағы алғашқы функциясы болса, онда

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру:

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha, \beta]$ аралығында бірсарынды және үзіліссіз дифференциалданатын болсын, мұндағы $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, онда

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау әдісі:

$y = u(x)$ және $y = v(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болсын, онда мына теңдік орынды:

$$\int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} vdu.$$

Меншіксіз интегралдар

a нүктесінен $+\infty$-ке дейінгі аралықтағы $y = f(x)$ функциясының *1-түрдегі меншіксіз интегралы* деп

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

шегі аталады. Егер шек нақты санға тең болса, онда меншіксіз интеграл *жинақты*, ал шегі жоқ болса немесе $\pm\infty$-ке тең болса, онда *жинақсыз* деп аталады.

b нүктесінде сол жақты үзілісі бар *a* нүктесінен *b* нүктесіне дейінгі аралықтағы $y = f(x)$ функциясының *2-түрдегі меншіксіз интегралы* деп

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$$

шегі аталады. Егер шек нақты санға тең болса, онда меншіксіз интеграл *жинақты*, ал шегі жоқ болса немесе $\pm\infty$-ке тең болса, онда *жинақсыз* деп аталады.

Анықталған интегралдардың қолдануы

Аудан есептеу:

1. $x = a,\ x = b$ түзулерімен, $[a,b]$ кесіндісінде $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$ үзіліссіз және $x \in [a,b]$ үшін $f_1(x) \ge f_2(x)$ шартын қанағаттандыратын функцияларымен шектелген облыстың ауданы

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

формуласымен есептеледі.

2. Егер $[a,b]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясының графигі параметрлік теңдеумен

берілсе, онда $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases}$

мұндағы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде $y(t) \ge 0$ үзіліссіз, ал $x(t)$-монотонды, үзіліссіз дифференциалданатын функциялар және $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ болса, онда сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданы

$$S(G) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

формуласымен есептеледі.

3. $\varphi = \alpha$ және $\varphi = \beta$ координата бас нүктесінен шығатын сәулелермен, $\alpha < \beta$ үшін $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде үзіліссіз теріс емес $\rho = \rho(\varphi)$ функциясымен шектелген G облысының ауданы

$$S(G) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$$

формуласымен есептеледі.

Доғаның ұзындығын есептеу:

1. Егер $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының графигі түзетілетін болса, онда функция графигінің $[a,b]$ кесіндісіндегі доғасының ұзындығы

$$I(L)=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

формуласымен есептеледі.

2. Егер L қисығы $[\alpha,\beta]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын параметрлік функциялармен берілсе, онда доғасының ұзындығы $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \\ t\in[\alpha,\beta], \end{cases}$

онда доғасының ұзындығы

$$I(L)=\int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$$

формуласымен есептеледі.

3. Егер L қисығы $\varphi\in[\alpha,\beta]$ кесіндісінде теріс емес $\rho=\rho(\varphi)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциясымен берілсе, онда $[\alpha,\beta]$ кесіндісіндегі доғасының ұзындығы

$$I(L)=\int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

формуласымен есептеледі.

Айналу денесінің көлемі:

1. Т денесінің көлемі $V(T)=\int_a^b Q(x)dx$, формуласымен есептеледі, мұндағы $Q(x)$- ОХ осіне перпендикуляр қимасының ауданы.

2. $x=a,\ x=b$ түзулерімен, $[a,b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ үзіліссіз функциясымен және ОХ осімен шектелген фигураны Ох осінен айналдырғанда пайда болған Т денесінің көлемі

$$V(T)=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

формуласымен есептеледі.

3. $x=a,\ x=b$ түзулерімен, $[a,b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ үзіліссіз функциясымен және ОХ осімен шектелген фигураны Оу осінен айналдырғанда пайда болған Т денесінің көлемі

$$V(T)=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

формуласымен есептеледі.

4. $x=a,\ x=b$ түзулерімен, $[a,b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ үзіліссіз функциясымен және ОХ осімен шектелген фигураны Ох осінен айналдырғанда пайда болған Н бетінің ауданы

$$S(H)=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$